

فصل ششم

انتگرال مجازی یا انتگرال ناسره

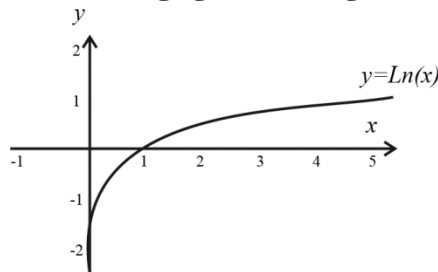
در تعریف انتگرال معین $\int_a^b f dx$ دیدیم که f تابعی کراندار و بازه $[a, b]$ ، یک بازه بسته متناهی است ولی به ضرورت مسئله یا کاربرد انتگرال، گاه حالتی پیش می‌آید که ممکن است یک یا هر دو شرط بالا نقض شود. به طور مثال در محاسبه مساحت ناحیه نامتناهی محدود بین محورهای مختصات و منحنی $y = \ln(x)$ ،

$$S = -\int_0^1 \ln(x) dx$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow 0^+$$

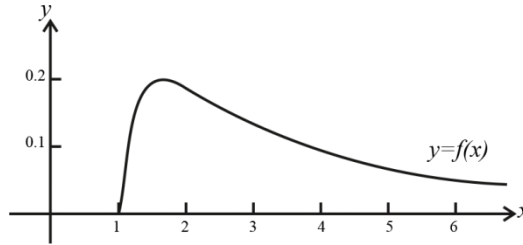
یعنی تابع زیر انتگرال در نزدیکی $x = 0$ تابعی بی‌کران است.



و یا در بررسی سطح رویه دورانی حاصل از دوران منحنی $y = \frac{1}{x}$ حول محور x ها

برای $x \geq 1$ یعنی $\int_1^{+\infty} \frac{2\pi}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx$ ، بازه انتگرال‌گیری $[1, +\infty)$ ، بازه‌ای بی‌کران است.

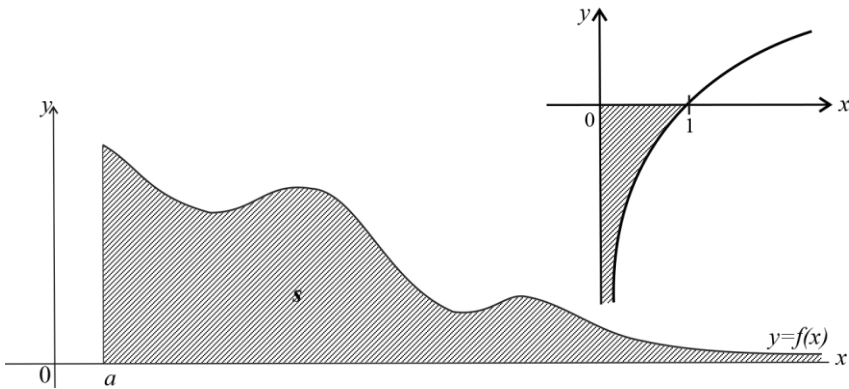
همچنین سطح زیر منحنی در شکل زیر یک انتگرال ناسره است یعنی $S = \int_1^{+\infty} f(x) dx$.



در چنین مواردی انتگرال را غیر واقعی یا مجازی یا ناسره می‌نامیم. در این قسمت ابتدا همگرایی و واگرایی و سپس مقدار چنین انتگرال‌هایی را تعریف و محاسبه می‌کنیم و در انتهای فصل، دو معیار برای تحقیق در همگرایی این نوع انتگرال‌ها ارائه می‌دهیم.

تعریف: انتگرال مجازی یا انتگرال ناسره

در انتگرال معین اگر بازه انتگرال‌گیری کراندار نباشد و یا تابع انتگرالده بی‌کران باشد و یا هر دو، انتگرال را مجازی یا انتگرال ناسره می‌نامیم.



تعریف: انتگرال مجازی همگرایی نوع اول (نوع اول: بازه بی‌کران)

اگر $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ چنان باشد که بر هر زیر بازه بسته $[a, t]$ مانند $[a, +\infty)$ ،

انتگرال‌پذیر باشد انتگرال مجازی $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ را همگرا می‌نامیم هرگاه

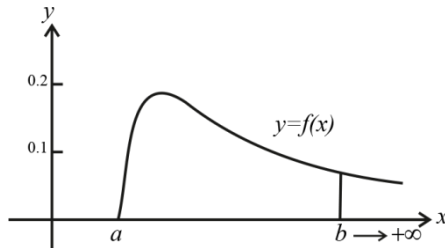
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$$

موجود و متناهی باشد و در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx := \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$$

و بطور مشابه $\int_{-\infty}^b f dx$ را همگرا می‌نامیم هر گاه $\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f dx$ موجود و متناهی باشد

و در غیر این صورت انتگرال را واگرا می‌گوییم.



مثال: در همگرایی انتگرال‌های زیر تحقیق کنید.

$$\int_0^{+\infty} \sin(x) dx = ?$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \sin(x) dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} -\cos(x) \Big|_0^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\cos(t) + \cos(0) \\ &= 1 - \lim_{t \rightarrow +\infty} \cos(t) \end{aligned}$$

حد وجود ندارد پس $\int_0^{+\infty} \sin(x) dx$ واگراست.

$$\int_0^{+\infty} x dx$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t x dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} \Big|_0^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{2} = +\infty \Rightarrow \int_0^{+\infty} x dx \text{ واگراست}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{-1} \Big|_0^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} -e^{-t} + 1 = 0 + 1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln|x| \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(t) - \ln(1) = +\infty \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} \text{ واگراست}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} ; \alpha \neq 1$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

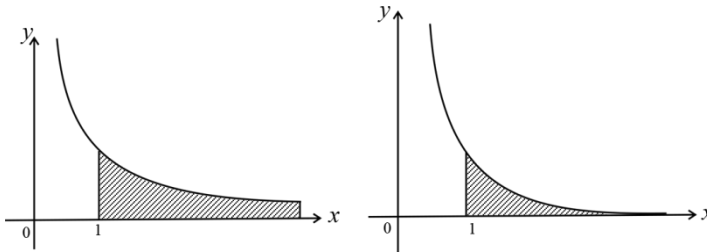
$$= \begin{cases} 0 - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} & 1-\alpha < 0 \\ +\infty & 1-\alpha > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ +\infty & \alpha < 1 \end{cases}$$

بنابراین $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ همگراست اگر و تنها اگر $\alpha > 1$ باشد و در این حالت $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$.

بنابراین

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} \text{ واگراست}$$



توضیح:

الف: اگر $f: R \rightarrow R$ بر هر بازه بسته انتگرال پذیر باشد، $\int_{-\infty}^{+\infty} f dx$ را همگرا می نامیم

هرگاه $\int_c^{+\infty} f dx$ و $\int_{-\infty}^c f dx$ هر دو همگرا باشد و در این حالت تعریف می کنیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f dx := \int_{-\infty}^c f dx + \int_c^{+\infty} f dx$$

در این تعریف c یک نقطه دلخواه روی محور اعداد حقیقی است و به راحتی می توان نشان داد که تعریف فوق از انتخاب نقطه c مستقل است.

مثال: $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ واگراست زیرا دیدیم که $\int_0^{+\infty} x dx$ واگراست.

ب: در $\int_{-\infty}^{+\infty} f dx$ اگر f تابعی زوج و یا تابعی فرد باشد، به راحتی ثابت می شود که

$$\int_0^{+\infty} f dx \text{ همگراست اگر و تنها اگر } \int_{-\infty}^0 f dx \text{ همگرا باشد.}$$

اگر $\int_0^{+\infty} f dx$ همگرا باشد و f تابعی زوج آنگاه

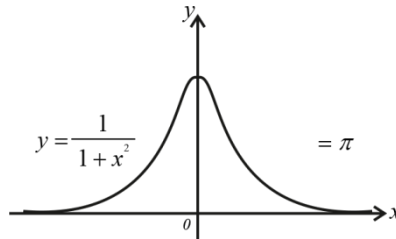
$$\int_{-\infty}^0 f dx = \int_0^{+\infty} f dx \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f dx = \int_{-\infty}^0 f dx + \int_0^{+\infty} f dx = 2 \int_0^{+\infty} f dx = 2 \int_0^{+\infty} f dx$$

و اگر $\int_0^{+\infty} f dx$ همگرا باشد و f تابعی فرد آنگاه

$$\int_{-\infty}^0 f dx = -\int_0^{+\infty} f dx \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f dx = \int_{-\infty}^0 f dx + \int_0^{+\infty} f dx = 0$$

مثال: در همگرایی انتگرال‌های زیر تحقیق کنید.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = ?$$



چون تابع $y = \frac{1}{1+x^2}$ زوج است، پس تنها کافی است $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ را بررسی کنیم.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left. \operatorname{tg}^{-1}(x) \right|_0^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\operatorname{tg}^{-1}(t) - \operatorname{tg}^{-1}(0)) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ همگراست و علاوه بر آن،

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tgh}(x) dx = ?$$

چون تابع $y = \operatorname{tgh}(x)$ تابعی فرد می‌باشد فقط $\int_0^{+\infty} \operatorname{tgh}(x) dx$ را بررسی می‌کنیم،

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{tgh}(x) dx = ?$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \operatorname{tgh}(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} dx$$

$$u = \cosh(x) \Rightarrow du = \sinh(x) dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} dx = \int \frac{du}{u} = \operatorname{Ln}|u| = \operatorname{Ln}|\cosh(x)| = \operatorname{Ln}(\cosh(x))$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{Ln}(\cosh(x)) \Big|_0^t$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{Ln}(\cosh(t)) - \operatorname{Ln}(\cosh(0)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{Ln}(\cosh(t)) - 0 = +\infty$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \operatorname{tgh}(x) dx \quad \text{واگراست} \quad \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tgh}(x) dx \quad \text{واگراست}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{e^{|x|}} dx = ?$$

تابع $y = \frac{x}{e^{|x|}}$ تابعی فرد می باشد بنابراین فقط وضعیت همگرایی $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{|x|}} dx$ یعنی $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$ را بررسی می کنیم.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{|x|}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$$

روش جزء به جزء:

$$u = x, \quad e^{-x} dx = dv \Rightarrow du = dx, \quad v = \frac{e^{-x}}{-1}$$

$$\Rightarrow \int x e^{-x} dx = uv - \int v du = x(-e^{-x}) - \int (-e^{-x}) dx =$$

$$-e^{-x} x + \int e^{-x} dx = -e^{-x} x + \frac{e^{-x}}{-1} = -e^{-x} (x + 1) = \frac{x + 1}{-e^x}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t x e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left. \frac{x + 1}{-e^x} \right|_0^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t + 1}{-e^t} + 1 \right) = \frac{\infty}{\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{-e^t} + 1 = 0 + 1 = 1$$

چون $\frac{x}{e^{|x|}}$ تابعی فرد می باشد پس، $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x} dx$ همگرا به صفر است.

ج: در تحقیق همگرایی $\int_{-\infty}^{+\infty} f dx$ باید دقت کرد که لزوماً $\int_{-\infty}^{+\infty} f dx$ و $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t f dx$

یکی نیست و یا به عبارتی،

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f dx \neq \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t f dx$$

به طور مثال، $\int_0^{+\infty} \sin(x) dx$ واگراست زیرا همان طور که دیدیم

واگراست ولی اگر به طور ناصحیح عمل کنیم،

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t \sin(x) dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} -\cos(x) \Big|_{-t}^t \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} -\cos(t) - (-\cos(t)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 0 = 0 \end{aligned}$$

یعنی یک انتگرال واگرا اشتباهاً به صفر همگرا می شود.

تعریف: انتگرال مجازی همگرای نوع دوم (نوع دوم: تابع بی کران)

اگر $f: (a, b] \rightarrow R$ چنان باشد که بر هر زیر بازه بسته $(a, b]$ انتگرال پذیر باشد و $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ، در این صورت انتگرال $\int_a^b f dx$ را همگرا می نامیم، هرگاه $\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f dx$ موجود و متناهی باشد و در این صورت تعریف می کنیم، $\int_a^b f dx := \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f dx$ و به طور مشابه اگر $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$ ، $\int_a^b f dx$ را همگرا می نامیم هرگاه $\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f dx$ موجود و متناهی باشد و تعریف می کنیم $\int_a^b f dx := \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f dx$ و در غیر این صورت انتگرال را واگرا می نامیم.

مثال: در همگرایی انتگرال های زیر تحقیق کنید.

$$\int_0^1 \ln(x) dx = ?$$

می دانیم که $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ یعنی تابع در نزدیکی نقطه $x = 0$ بی کران است

پس

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \ln(x) dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} (x \ln(x) - x) \Big|_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} (\ln(1) - 1) - (t \ln(t) - t) \\ &= -1 - \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(t)}{\frac{1}{t}} = \frac{\infty}{\infty} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} -t = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \ln(x) dx = -1 - 0 = -1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = ?$$

می دانیم که $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ ، پس،

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln|x| \Big|_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(1) - \ln(t) = +\infty \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x} dx \text{ واگراست}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = ? \quad \alpha > 0, \alpha \neq 1$$

$$\alpha \neq 1: \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\alpha} - \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} - 0 = \frac{1}{1-\alpha} & 1-\alpha > 0 \\ +\infty & 1-\alpha < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \\ +\infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

بنابراین $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ همگراست اگر و تنها اگر $\alpha < 1$ باشد و در این حالت $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$.

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \text{ و اگر است } \int_0^1 \frac{dx}{x^3}$$

$$I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = ?$$

چون $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = \pm\infty$ پس تعریف می‌کنیم $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$ همگراست اگر و تنها اگر

هر دو همگرا باشد و همچنین اگر هر دو همگرا بود تعریف می‌کنیم،

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$$

اگر قرار دهیم $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$ و $I_2 = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$

$$I_1 = \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3} \times (-1)} \Big|_0^t =$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt[3]{(1-t)^2} - 1}{-\frac{2}{3}} = \frac{0-1}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \Rightarrow I_1 = \frac{3}{2}$$

و به طور مشابه

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{(1-x)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3} \times (-1)} \Big|_t^2 = \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[3]{(1-2)^2} - \sqrt[3]{(1-t)^2}}{-\frac{2}{3}} = \frac{1-0}{-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

توضیح:

الف) $\int_0^1 \frac{\sin(x) dx}{x}$ ، انتگرال ناسره یا مجازی نمی‌باشد زیرا این تابع در همه نقاط بازه $(0, 1]$ پیوسته و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ و بازه انتگرال‌گیری کراندار است، بنابراین

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_0^1 f dx \quad \text{که در آن،}$$

$$f : [0, 1] \rightarrow R$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

ب) انتگرال‌های ناسره نوع اول و دوم قابل تبدیل به یکدیگرند.

به طور مثال، $I = \int_0^1 \frac{dx}{x}$ انتگرال ناسره نوع دوم است که با تغییر متغیر $t = \frac{1}{x}$ به انتگرال ناسره نوع اول تبدیل می‌شود.

$$t = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2} dt$$

$$x = 1 \Rightarrow t = 1$$

$$x \rightarrow 0^+ \Rightarrow t \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow I = \int_{+\infty}^1 \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t}} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$$

ج) در حالت خاص اگر هم بازه انتگرال‌گیری و هم تابع زیر انتگرال هر دو بی‌کران باشد، انتگرال ناسره را گاهی انتگرال ناسره نوع سوم می‌نامند ولی باید بدانیم که در حالت کلی انتگرال ناسره سوم به یک انتگرال ناسره نوع اول و یک انتگرال ناسره نوع دوم تجزیه می‌شود تا همگرایی آن بررسی شود.

مثال: در همگرایی $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$ تحقیق کنید.

حل: بازه انتگرال‌گیری بی‌کران است و از طرفی $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$ ، یعنی تابع هم

در نزدیکی نقطه $x = 1$ ، بی‌کران است پس انتگرال ناسره نوع سوم است و تعریف

می‌کنیم $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ همگرا است اگر و تنها اگر هر دو انتگرال $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ و

$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ همگرا باشند که به ترتیب انتگرال ناسره نوع دوم و نوع اول هستند و در این حالت،

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

اگر قرار دهیم $I_1 = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ و $I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} :$$

انتهای کمان α در ربع اول یا سوم $x = \sec(\alpha)$

$$\Rightarrow dx = \sec(\alpha) \operatorname{tg}(\alpha) d\alpha, \sqrt{x^2-1} = \sqrt{\sec^2(\alpha)-1}$$

$$= \sqrt{\operatorname{tg}^2(\alpha)} = |\operatorname{tg}(\alpha)| = \operatorname{tg}(\alpha)$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sec(\alpha) \operatorname{tg}(\alpha) d\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha)} =$$

$$\int \sec(\alpha) d\alpha = \operatorname{Ln} |\sec(\alpha) + \operatorname{tg}(\alpha)|$$

$$\sec(\alpha) = x = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}} \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \sqrt{x^2-1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{Ln} |x + \sqrt{x^2-1}|$$

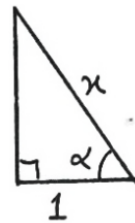
$$\lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \operatorname{Ln} |x + \sqrt{x^2-1}| \Big|_t^2 = \lim_{t \rightarrow 1^+} (\operatorname{Ln} |2 + \sqrt{4-1}| - \operatorname{Ln}(t + \sqrt{t^2-1})) =$$

$$\operatorname{Ln}(2 + \sqrt{3}) - \operatorname{Ln}(1) = \operatorname{Ln}(2 + \sqrt{3}) \Rightarrow I_1 = \operatorname{Ln}(2 + \sqrt{3})$$

و برای تحقیق در همگرایی I_2

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{Ln} |x + \sqrt{x^2-1}| \Big|_2^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\operatorname{Ln}(t + \sqrt{t^2-1}) - \operatorname{Ln}(2 + \sqrt{3})) = +\infty \Rightarrow$$

I_2 واگرا پس I واگراست.



آزمون‌هایی برای همگرایی انتگرال‌ها

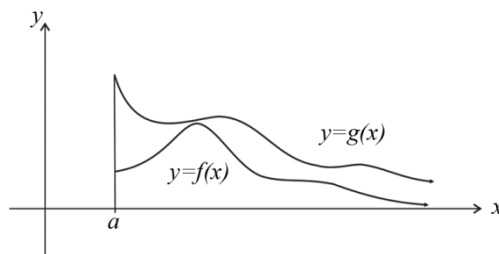
در بررسی همگرایی انتگرال‌های مجازی گاه به انتگرال‌های ناسره‌ای برخورد می‌کنیم که

ممکن است انتگرال غیر قابل حل باشد به طور مثال $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 3\sin(x)} + e^{-x}}$ ، در

این موارد اگر مقدار انتگرال موضوع اصلی نباشد، به عبارتی فقط همگرا بودن یا همگرا نبودن (واگرا بودن) انتگرال مطرح باشد می‌توان با محک قرار دادن انتگرال‌های مجازی قابل حل، همگرایی چنین انتگرال‌هایی را تایید یا رد کرد. در این متن این کار توسط دو قضیه زیر (آزمون مقایسه و آزمون مقایسه حدی برای همگرایی انتگرال‌ها) انجام می‌شود.

قضیه: آزمون مقایسه‌ای برای همگرایی انتگرال‌ها

اگر $f: [a, +\infty) \rightarrow R$ و $g: [a, +\infty) \rightarrow R$ دو تابع پیوسته و مثبت باشند به طوری که بر این بازه، $0 \leq f(x) \leq g(x)$ و $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ همگرا باشد، آنگاه $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ نیز همگراست.



توضیح: این قضیه در سایر حالت‌های انتگرال مجازی نوع اول و دوم کاربرد دارد.

مثال: در همگرایی انتگرال‌های زیر تحقیق کنید.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \ln(x)} = ?$$

$$x \geq 1 \Rightarrow \ln(x) \geq 0 \Rightarrow x^2 + \ln(x) \geq x^2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x^2 + \ln(x)} \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ همگراست} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \ln(x)} \text{ همگراست}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln(x)} = ?$$

$$x \geq 2 \Rightarrow \ln(x) > 0$$

برای $x > 1$ داریم $x > \ln(x)$ پس $\frac{1}{x} < \frac{1}{\ln(x)}$ ، از طرفی

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} - \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

$\int_1^2 \frac{dx}{x}$ انتگرال واقعی است پس فقط وضعیت همگرایی $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ مطرح است و چون

این انتگرال واگراست پس $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$ واگراست و بنابر آزمون مقایسه‌ای (عکس نقیض

آزمون) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln(x)}$ نیز واگراست.

$$\int_0^{+\infty} e^{x^2} dx = ?$$

$$\forall x : x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq x \xrightarrow{\exp} e^{x^2} \geq e^x > 0$$

زیرا تابع نمایی صعودی است،

$$\int_1^{+\infty} e^x dx$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t e^x dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^x \Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t - e = +\infty \Rightarrow \int_1^{+\infty} e^x dx$$

پس بنابر آزمون مقایسه‌ای $\int_1^{+\infty} e^{x^2} dx$ نیز واگراست. از طرفی

$$\int_0^{+\infty} e^{x^2} dx = \int_0^1 e^{x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{x^2} dx$$

$\int_0^1 e^{x^2} dx$ انتگرال واقعی است بنابراین فقط وضع همگرایی $\int_1^{+\infty} e^{x^2} dx$ مطرح می‌باشد

و چون واگراست پس $\int_0^{+\infty} e^{x^2} dx$ واگراست.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + x}} = ?$$

$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + x}}$ ناسره نوع سوم است زیرا هم بازه بی‌کران است و هم

بنابراین این انتگرال را به دو انتگرال ناسره نوع اول و نوع دوم $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^4 + x}} = +\infty$

در زیر تجزیه می‌کنیم.

انتگرال $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + x}}$ همگراست اگر و تنها اگر هر دو انتگرال $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4 + x}}$ و

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}} \text{ همگرا باشد.}$$

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}} \text{ انتگرال ناسره نوع اول}$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}} \text{ انتگرال ناسره نوع دوم}$$

$$0 < \frac{1}{\sqrt{x+x^4}} < \frac{1}{\sqrt{x}}, \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \text{ همگرا} \Rightarrow I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}} \text{ همگراست}$$

$$0 < \frac{1}{\sqrt{x+x^4}} < \frac{1}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^2}, \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ همگراست} \Rightarrow I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}} \text{ همگراست}$$

$$\text{بنابراین } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}} \text{ همگراست زیرا } I_1 \text{ و } I_2 \text{ هر دو همگرايند.}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{\sqrt{x^3}} dx = ?$$

$$\text{به طور مشابه، انتگرال } \int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{\sqrt{x^3}} dx \text{ همگراست اگر و تنها اگر، هر دو انتگرال}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{\sqrt{x^3}} dx \text{ و } \int_0^1 \frac{|\sin(x)|}{\sqrt{x^3}} dx \text{ همگرا باشد.}$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{|\sin(x)|}{\sqrt{x^3}} dx \text{ انتگرال ناسره نوع دوم}$$

$$\text{از آنجا که } |\sin(x)| \leq x \text{ و بر این بازه } x > 0 \text{ پس } |\sin(x)| \leq x$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{|\sin(x)|}{\sqrt{x^3}} \leq \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}, \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \text{ همگراست} \Rightarrow \int_0^1 \frac{|\sin(x)|}{\sqrt{x^3}} dx \text{ همگراست}$$

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{\sqrt{x^3}} dx \text{ انتگرال ناسره نوع اول}$$

$$\frac{|\sin(x)|}{\sqrt{x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^3}}, \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}} \text{ همگراست} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{\sqrt{x^3}} dx \text{ همگراست}$$

$$\text{پس } I_2 \text{ همگرا می باشد و در نتیجه } I = I_1 + I_2 \text{ همگراست.}$$

قضیه: آزمون مقایسه‌ای حدی برای همگرایی انتگرال‌ها

اگر $f: [a, +\infty) \rightarrow R$ و $g: [a, +\infty) \rightarrow R$ دو تابع پیوسته و مثبت باشند به

طوری که، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ موجود باشد آنگاه،

الف: اگر $L = 0$ باشد، از همگرایی $\int_a^{+\infty} g \, dx$ ، همگرایی $\int_a^{+\infty} f \, dx$ نتیجه می‌شود.

ب: اگر $L = +\infty$ باشد، از واگرایی $\int_a^{+\infty} g \, dx$ ، واگرایی $\int_a^{+\infty} f \, dx$ نتیجه خواهد شد.

ج: اگر L یک عدد حقیقی مثبت باشد، وضعیت همگرایی $\int_a^{+\infty} f \, dx$ و $\int_a^{+\infty} g \, dx$ یکسان است.

توضیح: این قضیه را می‌توان در سایر حالت‌های انتگرال مجازی نوع اول و نوع دوم به کار برد.

مثال: در همگرایی انتگرال‌های زیر تحقیق کنید.

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^7}} dx = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^7}}}{\frac{x^2}{\sqrt{x^7}}} = 1$$

بنابراین وضعیت همگرایی $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^7}} dx$ و $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ برابر

آزمون مقایسه‌ای حدی یکسان است و چون $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ همگرا است پس

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^7}} dx \text{ نیز همگراست. همچنین}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^7}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^7}} dx - \int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^7}} dx$$

و $\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^7}} dx$ یک انتگرال واقعی، بنابراین I همگراست.

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1 + \sin(\pi x)} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2 + \sin(\pi x)}}{\frac{1}{x^2}} = 1$$

وضعیت همگرایی I و انتگرال $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ یکسان است، $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ همگراست پس بنابر آزمون مقایسه حدی I همگراست.

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x} dx = ?$$

چون $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ ، پس در $+\infty$ ، رفتار تابع $\frac{1+e^{-x}}{x}$ مشابه $\frac{1}{x}$ می باشد یعنی،

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1+e^{-x}}{x}}{\frac{1}{x}} = 1 \text{ و } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx \text{ واگراست } \Rightarrow I \text{ واگراست}$$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^2} dx = ?$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(x)|}{x^2} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^2} dx$$

اگر قرار دهیم $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(x)|}{x^2} dx$ و $I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^2} dx$ ، I همگراست، اگر و تنها اگر هر دو انتگرال I_1, I_2 همگرا باشند.

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(x)|}{x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x^2} dx$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \Rightarrow \frac{\sin(x)}{x^2} = \frac{\sin(x)}{x} \times \frac{1}{x} \sim 1 \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

به عبارتی در نزدیکی $x=0$ رفتار تابع $\frac{\sin(x)}{x^2}$ مشابه تابع $\frac{1}{x}$ است و واگراست.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{\frac{x^2}{x}} = 1 \quad \text{و} \quad \int_0^1 \frac{1}{x} dx \quad \text{واگرا} \Rightarrow \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^2} \quad \text{واگراست} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x^2} \quad \text{واگرا}$$

I_1 واگراست پس I واگراست.

$$I = \int_0^1 e^{\frac{1}{x}} dx = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \times \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$\int_0^1 \frac{dx}{x}$ واگراست پس بنابر آزمون مقایسه‌ای حدی I هم واگراست.

$$\int_0^{+\infty} e^{x^2} dx = ?$$

برای این انتگرال از هر دو آزمون می‌توان کمک گرفت.

راه اول: به کمک آزمون مقایسه‌ای که قبلاً حل شده است.

راه دوم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2-x} = +\infty \quad \text{و} \quad \int_0^{+\infty} e^x dx \quad \text{واگرا} \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{x^2} \quad \text{واگراست}$$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx = ?$$

قبل از این دیدیم که برای هر $\alpha > 0$,

$$\ln(x) \leq \frac{1}{\alpha} x^\alpha$$

حال اگر قرار دهیم $\alpha = \frac{1}{2}$ پس،

$$\ln(x) \leq 2\sqrt{x} \Rightarrow \frac{\ln(x)}{x^2} \leq \frac{2\sqrt{x}}{x^2} = \frac{2}{x\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(x)}{x^2}}{\frac{1}{x\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$$

چون $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ همگراست بنابر آزمون مقایسه‌ای حدی I نیز همگراست و یا بنابر آزمون مقایسه‌ای از اینکه $\frac{\ln(x)}{x^2} \leq \frac{2}{x\sqrt{x}}$ و $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ همگراست پس I همگراست.

تمرین

۱. در همگرایی انتگرال‌های زیر تحقیق کرده و مقدار انتگرال‌های همگرا را مشخص کنید.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}, \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}, \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}, \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x^2-1}, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2xe^{-x^2} dx, \int_{-\infty}^0 e^{-|x|} dx, \int_0^1 \ln(x) dx, \int_{-1}^1 \ln|x| dx, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^\alpha}, \int_2^{+\infty} \ln(x) dx, \int_{-\infty}^{+\infty} e^{|x|} dx, \int_{-\infty}^{+\infty} \cosh(x) dx, \int_{-\infty}^{+\infty} \sinh(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}, \int_1^2 \frac{dx}{x \ln(x)}, \int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx, \int_0^3 \frac{dx}{x-1}, \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}, \int_0^1 \frac{dx}{x-x^2}$$

$$\int_{-2}^2 \frac{dx}{x-x^2}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin(x)}, \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x}, \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad \alpha > 0, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x-1)}$$

راهنمایی: در $\int_0^1 \frac{dx}{x-x^2}$ چون $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-x^2} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x-x^2} = +\infty$ یعنی

در هر دو سر بازه تابع بی کران می‌شود تعریف می‌کنیم، $\int_0^1 \frac{dx}{x-x^2}$ همگراست اگر و

تنها اگر هر دو انتگرال $\int_0^c \frac{dx}{x-x^2}$ و $\int_c^1 \frac{dx}{x-x^2}$ همگرا باشد که در آن $0 < c < 1$ هر نقطه دلخواهی می‌تواند باشد.

۲. در وضعیت همگرایی انتگرال‌های زیر تحقیق کنید.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx, \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx, \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+x^4}}, \int_0^{\pi^2} \frac{dx}{1-\cos(\sqrt{x})}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x \sin(x)}, \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx, \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{x} dx, \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x - x}}, \int_0^1 x^2 e^{\frac{1}{x}} dx$$

$$\int_{-1}^1 e^{\frac{1}{x}} dx, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^6}}, \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi-x}} dx, \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin(x) + \sqrt{x}}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{x} dx, \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx, \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln(x)}, \int_{\pi}^{+\infty} \frac{2 + \cos(x)}{x} dx$$

۳. با فرض آنکه $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ، مطلوب است $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$ و $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$.